Análisis comparativo de dos modelos matemáticos para el problema estocástico de recolección y transporte óptimo de residuos médicos

Luis J. Zeballos[1,2] y Marian G. Marcovecchio[1,3]

[1] Facultad de Ingeniería Química, Universidad Nacional del Litoral.
[2] INTEC, Instituto de Desarrollo Tecnológico para la Industria Química, CONICET-UNL.
[3] INGAR, Instituto de Desarrollo y Diseño, CONICET-UTN.
Santa Fe, Argentina

zeballos@intec.unl.edu.ar, mariangm@santafe-conicet.gov.ar

Resumen. La coordinación de las actividades de recolección, transporte y descarga segura en los sitios de tratamiento, en el problema de gestión de residuos médicos, es fundamental para disminuir la propagación de enfermedades. La representación matemática del problema mencionado resulta en un complejo problema de toma de decisiones, más aún si se considera el comportamiento estocástico de la generación de residuos patológicos. Debido a la alta complejidad del problema y a la necesidad de mejorar la representación del mismo, y su posterior resolución, diversas alternativas de modelado han sido desarrolladas. En este contexto, el trabajo presenta un análisis comparativo de dos modelos de programación matemática para el problema abordado considerando la variabilidad intrínseca que tiene la generación de residuos en los centros de salud considerados. Ambas formulaciones se desarrollaron bajo el concepto de robustez ligera, el cual permite la consideración de la incertidumbre en la generación de residuos, pero difieren en la cantidad de variables y restricciones consideradas. Los modelos son evaluados usando un caso de estudio real del norte de Jordania. El trabajo muestra los resultados obtenidos con ambos modelos y destaca las ventajas y desventajas de usar cada formulación.

Palabras clave: gestión de residuos, optimización robusta, problema de ruteo de vehículos.

1 Introducción

El problema de la gestión de los residuos implica la coordinación de varias actividades vinculadas a la logística, como lo son la recolección, el transporte y la descarga en los sitios de tratamiento de estos materiales. El correcto acoplamiento de las actividades, considerando los tiempos de las mismas, es esencial para impedir la propagación de enfermedades entre la población hospitalaria, el personal de salud, los trabajadores encargados de la gestión y la comunidad en general. En este contexto, el desarrollo de herramientas de soporte de decisión basadas en métodos rigurosos de optimización, que permitan representar el problema y brinden soluciones al complejo entorno, son altamente deseables. De esta forma, el abordaje riguroso del problema permitiría alcanzar condiciones de gestión adecuadas desde el punto de vista ambiental y sanitario, mientras se consideran los aspectos económicos de las empresas o entes encargado de la recolección y transporte de los residuos patológicos.

El problema de la gestión de los residuos se encuadra básicamente dentro del problema de ruteo de vehículos (VRP, por sus siglas en inglés, Vehicle Routing Problem), al que se le agregan restricciones específicas del caso. El VRP ha recibido mucha atención en las últimas décadas y continúa siendo ampliamente estudiado debido a la complejidad del mismo y a la gran cantidad de variantes que se presentan. Un panorama global de los principales avances y aportes realizados en torno al VRP, y sus principales características, puede encontrarse en [1], [2], [3] y [4].

Con relación al manejo y recolección de residuos hospitalarios, varios trabajos de investigación han sido presentados. Algunos de las contribuciones más relevantes relacionadas al problema objeto de estudio de este trabajo se detallan a continuación. Alshraideh y Abu [5] abordaron el problema de gestión y recolección de residuos hospitalarios para un área que comprende 4 distritos en el norte de Jordania. Los autores consideran el caso en que se dispone de dos camiones para la recolección y transporte hasta un único incinerador de los desechos de 19 centros hospitalarios. Este trabajo introdujo un modelo matemático donde se considera que la cantidad generada de residuos diariamente varia aleatoriamente y que, con cierto nivel de certeza, la capacidad de carga de los camiones no debe superarse. Para resolver casos prácticos del problema, los autores utilizan una estrategia de dos pasos. En el primer paso se utiliza una rutina de optimización basada en un algoritmo genético para encontrar soluciones parciales donde se determina qué camión visita qué hospitales cada día. Luego, se utiliza una rutina de optimización del problema del vendedor ambulante (TSP) para encontrar las mejores rutas para los camiones (los viajes más cortos) dada la solución parcial encontrada en el paso anterior. Yu y colab. [6] introdujeron un modelo matemático de programación mixta entera lineal (MIP) bi-objetivo estocástico de dos etapas para abordar el problema de asignación de instalaciones de desechos peligrosos con consideraciones de flujo, mientras se minimiza tanto el costo como el riesgo relacionado con la recolección, el transporte, el tratamiento y la eliminación de desechos peligrosos. En el enfoque, la incertidumbre se describe mediante escenarios discretos y el problema de enrutamiento se considera en forma agregada. Dada la complejidad de la formulación resultante, los autores utilizan una heurística de programación de objetivos para obtener soluciones. Nikzamir y Baradaran [6] propusieron un modelo de doble objetivo para el transporte de desechos médicos con el fin de minimizar los costos totales y la contaminación, centrándose en la incertidumbre del tiempo de transporte de los camiones. Los autores propusieron una metaheurística para obtener soluciones. La performance del modelo y de la metaheurística fue evaluada con una red logística de residuos sanitarios de Irán. Tirkolaee y colab. [7] propusieron un modelo MIP para abordar el problema de ubicación de nodos y ruteo de vehículos para la gestión de desechos médicos en la pandemia de COVID-19. Como parte del problema abordado se considera que cada vehículo puede hacer varios viajes diariamente, que los nodos deben visitarse dentro de ciertas ventanas de tiempo, y que la cantidad de residuos generados varía. Tirkolaee y colab.

[7] utilizaron programación difusa para representar la incertidumbre en la cantidad de residuos generados. El enfoque se probó con un caso de estudio real de una ciudad de Irán.

Se puede observar que se han empleado diversas técnicas para abordar el problema de gestión de residuos con parámetros inciertos. No obstante, aún persiste el desafío de desarrollar formulaciones que traten la incertidumbre en forma eficaz, permitiendo alcanzar soluciones optimas o cercanas a las óptimas en tiempos de cómputos admisibles para el problema. Una técnica prometedora que ha ganado interés en los últimos tiempos es la optimización robusta [9] [10], la cual proporciona un enfoque versátil para abordar diversos problemas de optimización permitiendo soluciones no tan conservadoras como las generadas por otras técnicas. En [11] y [12], se abordó el problema a través de una formulación de ruteo de vehículos del tipo capacitado y con viajes múltiples, aplicando el concepto de robustez ligera. El objetivo planteado para el problema fue minimizar las distancias totales recorridas semanalmente. El modelo contempla las limitaciones de capacidad, los requerimientos de periodicidad de retiro, entre otras restricciones importantes. El abordaje de robustez ligera permite contemplar la incertidumbre en las cantidades de desecho generadas en cada nodo. Luego se diseñó una estrategia de resolución computacionalmente eficiente para el problema de operación regular resultante. La metodología propuesta, consiste en una estrategia inteligente de ramificación y acotamiento que se basa en las decisiones claves del problema. El modelo y la metodología de resolución fueron aplicados para resolver un caso real tomado de la literatura. La técnica de resolución contribuyó significativamente a mejorar la calidad de las soluciones encontradas y el gap de optimalidad alcanzado para las distintas instancias del problema abordadas.

En este contexto, el trabajo presenta un análisis comparativo de dos formulaciones desarrolladas bajo el concepto de robustez ligera para el problema de gestión de residuos médicos considerando la variabilidad intrínseca que tiene la generación de residuos en los centros de salud considerados. Los modelos difieren en la cantidad de variables y restricciones consideradas y sus performances fueron evaluadas usando un caso de estudio real del norte de Jordania.

2 Descripción del problema

El problema abordado incluye la planificación semanal de rutas de transporte eficientes para un grupo dado de camiones que deben visitar un cierto número de establecimientos de salud, mientras se coordinan las actividades de carga, transporte e incineración, y se cumplen las normativas y regulaciones relacionadas con el manejo de desechos peligrosos.

El objetivo es establecer una programación de recorridos que minimice los costos totales de transporte, al mismo tiempo que se cumplen restricciones de capacidad, tiempo y seguridad derivadas del adecuado manejo de los residuos peligrosos. Como parte del problema se considera que:

1) Se cuenta con un único centro de incineración; 2) Cada recorrido inicia y finaliza en el centro de incineración;

2) La cantidad diaria de residuos generada en cada hospital es desconocida;

3) Se requiere que dos visitas consecutivas a un mismo hospital se realicen dentro de un cierto número de días;

4) Los camiones pueden realizar múltiples viajes al día, siempre y cuando los tiempos de los recorridos no excedan la jornada laboral diaria;

5) La cantidad total de residuos recolectados por cada camión en cada recorrido no puede exceder la capacidad del camión;

6) Existe un tiempo fijo y conocido entre la llegada y salida de un camión en un centro hospitalario (tiempo de servicio).

A continuación, se detallan los conjuntos y parámetros empleados en los modelos de programación matemática presentados en la sección 3.

Conjuntos

I	Conjunto de nodos formados por el incinerador y los centros de salud
D	Conjunto de Días
C	Conjunto de Camiones

Parámetros

d_{ij}	Distancia entre los nodos i y j
vel	Velocidad promedio de los camiones
ts	Tiempo de servicio
hl	Cantidad máxima de horas de viaje diarias de cada camión
NC	Número total de camiones disponibles
NR	Número máximo de recorridos realizados por día por el total de vehículos
Q	Capacidad de cada camión
NH	Cantidad de nodos (Incinerador y centros de salud)
q_i	Cantidad promedio de desperdicios generados diariamente por el nodo i
q_i^{min}	Cantidad mínima estimada de desperdicios que se pueden generar diariamente en el nodo i
q_i^{max}	Cantidad máxima estimada de desperdicios que se pueden generar diariamente en el nodo i
tp	Cantidad de días del periodo de tiempo total considerado
tmv	Tiempo máximo entre visitas de recolección consecutivas

3 Modelos de programación matemática

3.1 Modelo de 4 índices

En esta sección se presenta un modelo de programación matemática que representa el problema estocástico abordado. En este modelo, la variable de decisión principal es una variable binaria x_{ijcd} que está definida para cuatro índices: dos corresponden al conjunto formado por el nodo-incinerador y todos los nodos de centros de salud a visitar, otro al conjunto de camiones y el restante al conjunto de días semanales laborables. Esta variable binaria asume el valor 1 si el camión c recorre el trayecto del nodo i al nodo j en día d, y asume el valor 0 sino.

A continuación, se listan las variables de este modelo:

x_{ijcd} Variable binaria que vale 1 si el día *d* el camión *c* recorre el trayecto que va del nodo *i* al nodo *j*; 0 sino

qd_{icd} Variable continua que especifica la cantidad de desperdicios recolectados el día *d* en el nodo *i* por el camión *c* si este camión realiza esta visita, 0 sino

rsv_{cd} Variable continua para calcular la capacidad de reserva de seguridad del camión *c* en el recorrido del día *d*

u_{icd} Variable continua auxiliar para evitar los sub-ciclos en los recorridos de los camiones. La variable se define para todos los nodos *i*, todos los camiones *c*, y todos los días *d*.

La formulación del problema es descripta a continuación.

La ecuación (1) define la función objetivo del problema: minimizar la distancia total recorrida semanalmente por todos los vehículos.

$$min \sum_{i\in I, j\in I, c\in C, d\in D} \left(x_{ijcd} \cdot d_{ij}\right) \tag{1}$$

Las ecuaciones (2) a (16) son las restricciones del problema.

La ecuación (2) indica que cada nodo de centro de salud es visitado por a lo sumo un camión por día:

$$\sum_{j\in I, c\in C} x_{jicd} \leq 1 \qquad \forall i \in I \backslash \{0\}, \forall d \in D \tag{2}$$

La ecuación (3) indica que cada vez que un camión llega a un nodo, debe luego partir:

$$\sum_{j\in I} x_{jicd} = \sum_{j\in I} x_{ijcd} \qquad \forall i \in I, \forall c \in C, \forall d \in D \tag{3}$$

La ecuación (4) establece que cada camión realiza a lo sumo un recorrido por día. Más adelante se comentará qué modificaciones se deben realizar a este modelo para permitir que algún camión realice más de un recorrido por día, siempre que las horas de trabajo total no superen la jornada laboral diaria.

$$\sum_{j\in I} x_{1jcd} \leq 1 \qquad \forall c \in C, \forall d \in D \tag{4}$$

La ecuación (5) establece el límite de tiempo del recorrido de cada camión. Se considera un tiempo de servicio pre establecido fijo, para contabilizar el tiempo de ingreso a cada centro de salud, el tiempo de descarga y demás tiempos requeridos en cada visita.

$$\sum_{i\in I, j\in I} x_{jicd} \cdot \left(d_{ij}/vel + ts\right) \leq hl \qquad \forall c \in C, \forall d \in D \tag{5}$$

A través de las distintas visitas semanales a cada centro de salud, se recoge todos los desechos semanales generados en el establecimiento:

$$\sum_{c \in C, d \in D} qd_{icd} \geq q_i \cdot tp \qquad \forall i \in I \backslash \{0\} \tag{6}$$

En este modelo, se considera que en cada visita a un centro de salud *i*, la cantidad recolectada es como mínimo q_i^{min} y como máximo q_i^{max} por la cantidad de días transcurridos desde la última visita al nodo. El parámetro q_i^{min} es la cantidad mínima estimada de desperdicios que se pueden generar diariamente en el nodo *i*. Por otra parte, desde que la cantidad de residuos generados en los centros de salud varía, y debido a que se quiere evitar que se supere la capacidad de los camiones en un determinado recorrido, se impone como condición que la cantidad de desperdicios recolectados en el día *d* en el centro *i* por el camión *c* sea menor o igual que la cantidad máxima estimada de desperdicios que el centro *i* puede generar diariamente (q_i^{max}) multiplicado por la máxima cantidad de días que puede existir entre visitas consecutivas. Las ecuaciones (7) a (11) modelan estas condiciones para el caso en que el máximo período permitido entre dos visitas a un nodo sea de 3 días (*tmv*=3). Estas ecuaciones son aplicadas de forma circular sobre los días de la semana:

$$q_i^{min} \sum_{j \in I} x_{jicd} \leq qd_{icd} \qquad \forall i \in I \backslash \{0\}, \forall c \in C, \forall d \in D \tag{7}$$

$$qd_{icd} \leq 3 q_i^{max} \sum_{j \in I} x_{jicd} \qquad \forall i \in I \backslash \{0\}, \forall c \in C, \forall d \in D \tag{8}$$

$$\begin{aligned} q_i^{min} \Bigg[& \sum_{j \in I} x_{jicd} + \sum_{j \in I} \left(x_{jicd} - x_{jic(d-1)} \right) \\ & + \sum_{j \in I} \left(x_{jicd} - x_{jic(d-1)} - x_{jic(d-2)} \right) \Bigg] \\ & \leq qd_{icd} \qquad \forall i \in I \backslash \{0\}, \forall c \in C, \forall d \in D \end{aligned} \tag{9}$$

$$qd_{icd} \leq q_i^{max} \left(3 - 2 \sum_{j \in I} x_{jic(d-1)} \right) \quad \forall i \in I \backslash \{0\}, \forall c \in C, \forall d \in D \tag{10}$$

$$qd_{icd} \leq q_i^{max} \left(3 - \sum_{j \in I} x_{jic(d-2)} \right) \quad \forall i \in I \backslash \{0\}, \forall c \in C, \forall d \in D \tag{11}$$

Teniendo en cuenta la incertidumbre en la cantidad de desechos generados por cada centro de salud, se considera dejar capacidad libre en cada recorrido de cada camión. Esta capacidad reservada permitirá poder hacer frente a incrementos inesperados en las cantidades a recolectar. En este trabajo se propone calcular la capacidad de camión extra a reservar como el valor de la diferencia más alta entre la cantidad de residuos recogidos y el valor máximo q_i^{max} para los nodos incluidos en el recorrido del camión. Este cálculo se realiza a través de las restricciones (12) y (13). La restricción (14) se aplica de forma circular sobre los días de la semana.

$$(q_i^{max} - qd_{icd}) \sum_{j \in I} x_{jicd} \leq rsv_{cd} \qquad \forall i \in I \backslash \{0\}, \forall c \in C, \forall d \in D \qquad (12)$$

$$\begin{aligned}(q_i^{max} - qd_{icd}) \sum_{j \in I} x_{jicd} &+ q_i^{max} \sum_{j \in I} \left(x_{jicd} - x_{jic(d-1)}\right) \\ &+ q_i^{max} \sum_{j \in I} \left(x_{jicd} - x_{jic(d-1)} - x_{jic(d-2)}\right) \\ &\leq rsv_{cd} \qquad \forall i \in I \backslash \{0\}, \forall c \in C, \forall d \in D\end{aligned} \qquad (13)$$

La ecuación (14) incluye la reserva en la capacidad de cada camión para calcular la carga permitida en cada recorrido.

$$\sum_{i \in I} qd_{icd} + rsv_{cd} \leq Q \qquad \forall c \in C, \forall d \in D \qquad (14)$$

La siguiente restricción asegura que cada centro de salud se visita dentro del máximo periodo permitido.

$$\sum_{j \in I, c \in C} \sum_{0 \leq f \leq (tmv-1)} x_{jic(d+f)} \geq 1 \qquad \forall i \in I \backslash \{0\}, \forall d \in D \qquad (15)$$

Finalmente, la restricción (16) es la que eliminan sub-ciclos en los recorridos de los camiones.

$$u_{ircd} - u_{jrcd} + NH * x_{ijrcd} \leq NH - 1 \qquad \forall i, j \in I, i \neq j, i \neq 0, j \neq 0, c \in C, d \in D \qquad (16)$$

3.2 Modelo de 3 índices

En esta sección se presenta otro modelo de programación matemática para el mismo problema estocástico, en donde la variable de decisión principal es una variable binaria y_{ijd} que en este caso está definida con tres índices: dos corresponden al conjunto formado por el nodo-incinerador y todos los nodos de centros de salud a visitar y otro al conjunto de días semanales laborables. Esta variable binaria asume el valor 1 si algún recorrido del día *d* recorre el trayecto del nodo *i* al nodo *j*, y asume el valor 0 sino. En este modelo, sólo se determinan los recorridos diarios que luego serán asignados a los camiones disponibles según los criterios adoptados por la compañía a cargo.

A continuación, se listan las variables de este modelo:

y_{ijd} Variable binaria que vale 1 si el día *d* algún camión recorre el trayecto que va del nodo *i* al nodo *j*; 0 sino

t_{id}	Variable continua que indica el tiempo en el que el nodo *i* es visitado el día *d*, si el nodo es visitado
qd_{id}	Variable continua que especifica la cantidad de desperdicios recolectados en el nodo *i* el día *d*, si el nodo es visitado
qa_{id}	Variable continua que representa la carga acumulada del vehículo luego de visitar al nodo *i* el día *d*, 0 si este nodo no es visitado ese día
rsv_{id}	Variable continua para calcular la capacidad de reserva de seguridad de cada recorrido del día *d*

A continuación, se describe la formulación del problema de programación matemática.

La función objetivo del problema es minimizar la distancia total recorrida semanalmente por todos los vehículos (1).

$$min \sum_{i \in I, j \in I, d \in D} \left(y_{ijd} \cdot d_{ij} \right) \tag{17}$$

Las ecuaciones (18) a (36) son las restricciones del problema para la formulación de tres índices.

Similar a la ecuación (2), la ecuación (18) impone que cada centro de salud es visitado a lo sumo una vez por día:

$$\sum_{j \in I} y_{ijd} \leq 1 \qquad \forall i \in I \backslash \{0\}, \forall d \in D \tag{18}$$

La ecuación (19), al igual que la ecuación (3), indica que para cada nodo el número de llegadas por día es igual al número de partidas.

$$\sum_{j \in I} y_{jid} = \sum_{j \in I} y_{ijd} \qquad \forall i \in I, \forall d \in D \tag{19}$$

La ecuación (20) establece la cantidad de recorridos por día realizados por el conjunto de todos los vehículos disponibles.

$$\sum_{j \in I} y_{0jd} \leq NR \qquad \forall d \in D \tag{20}$$

Las ecuaciones (21) y (22) determinan el tiempo en el cual el nodo *i* es visitado el día *d*, si ese día el nodo es visitado. Es decir, estas restricciones calculan el tiempo acumulado del recorrido al momento de visitar un determinado nodo. El nodo 0 es el incinerador, desde allí se inicia cada recorrido, por lo que inicialmente no hay tiempo acumulado.

$$t_{jd} \geq -hl + \left(hl + \frac{d_{0j}}{vel} + ts \right) \cdot y_{0jd} \qquad \forall j \in I, \forall d \in D \tag{21}$$

$$t_{jd} \geq t_{id} - hl + \left(hl + \frac{d_{ij}}{vel} + ts\right) \cdot y_{ijd} \qquad \forall i \in I \setminus \{0\}, \forall j \in I, \forall d \in D \qquad (22)$$

El tiempo empleado por todos los recorridos programados para cada día no debe exceder las horas laborables diarias multiplicadas por el total de vehículos disponibles:

$$\sum_{i \in I, j \in I} \left(\frac{d_{ij}}{vel} + ts\right) \cdot y_{ijd} \leq hl \cdot NC \qquad \forall d \in D \qquad (23)$$

La ecuación (24) es equivalente a la ecuación (7) y asegura que a cada centro de salud se le recolecta la totalidad de los desechos generados semanalmente:

$$\sum_{d \in D} qd_{id} \geq q_i \cdot tp \qquad \forall i \in I \setminus \{0\} \qquad (24)$$

De forma similar a las ecuaciones (8) a (12) del modelo presentado en la sección anterior, las ecuaciones (25) a (29) imponen que en cada visita a un centro de salud *i*, la cantidad recolectada es como mínimo q_i^{min} y como máximo q_i^{min} por la cantidad de días transcurridos desde la última visita al nodo. Estas ecuaciones son aplicadas de forma circular sobre los días de la semana, y aquí se asume *tmv*=3.

$$q_i^{min} \sum_{j \in I} y_{jid} \leq qd_{id} \qquad \forall i \in I \setminus \{0\}, \forall d \in D \qquad (25)$$

$$qd_{id} \leq 3 q_i^{max} \sum_{j \in I} y_{jid} \qquad \forall i \in I \setminus \{0\}, \forall d \in D \qquad (26)$$

$$q_i^{min} \left[\sum_{j \in I} y_{jid} + \sum_{j \in I} \left(y_{jid} - y_{ji(d-1)}\right) + \sum_{j \in I} \left(y_{jid} - y_{ji(d-1)} - y_{ji(d-2)}\right)\right] \leq qd_{id} \qquad \forall i \in I \setminus \{0\}, \forall d \in D \qquad (27)$$

$$qd_{id} \leq q_i^{max} \left(3 - 2 \sum_{j \in I} y_{ji(d-1)}\right) \qquad \forall i \in I \setminus \{0\}, \forall d \in D \qquad (28)$$

$$qd_{id} \leq q_i^{max} \left(3 - \sum_{j \in I} y_{ji(d-2)}\right) \qquad \forall i \in I \setminus \{0\}, \forall d \in D \qquad (29)$$

Las restricciones (30) y (31) calculan la carga acumulada en cada vehículo luego de visitar cada nodo de su recorrido. El nodo 0 es el incinerador, cada recorrido comienza allí y por lo tanto no hay carga acumulada. Estas dos ecuaciones también impiden que la solución contenga sub-ciclos.

$$qa_{jd} \geq -Q + \left(Q + qd_{jd}\right) \cdot y_{0jd} \qquad \forall j \in I \backslash \{0\}, \forall d \in D \qquad (30)$$

$$qa_{jd} \geq qa_{id} - Q + \left(Q + qd_{jd}\right) \cdot y_{ijd} \qquad \forall i \in I \backslash \{0\}, \forall j \in I \backslash \{0\}, \forall d \in D \qquad (31)$$

El espacio de reserva a dejar en cada recorrido de vehículo se calcula a través de las ecuaciones (32) a (34). Se calcula un valor para cada nodo y para cada día como $rsv_{id} = q_i^{max} \cdot D_i - qd_{id}$, donde D_i es la cantidad de días transcurridos desde la última visita al nodo *i* (ecuaciones (32) y (33)). Luego, la reserva de espacio de cada recorrido será max rsv_{id}, calculado sobre todos los nodos *i* visitados en el recorrido. Esto es asegurado por la ecuación (34).

$$(q_i^{max} - qd_{id}) \cdot \sum_{j \in I} y_{jid} \leq rsv_{id} \qquad \forall i \in I \backslash \{0\}, \forall d \in D \qquad (32)$$

$$(q_i^{max} - qd_{id}) \cdot \sum_{j \in I} y_{jid} + q_i^{max} \sum_{j \in I} \left(y_{jid} - y_{ji(d-1)}\right) + \\ + q_i^{max} \sum_{j \in I} \left(y_{jid} - y_{ji(d-1)} - y_{ji(d-2)}\right) \leq rsv_{id} \qquad (33) \\ \forall i \in I \backslash \{0\}, \forall d \in D$$

$$rsv_{id} \geq rsv_{jd} \cdot y_{jid} \qquad \forall i \in I, \forall j \in I \backslash \{0\}, \forall d \in D \qquad (34)$$

Al final de cada recorrido, se garantiza no sobrepasar la capacidad del vehículo y reservar espacio de acuerdo a la demanda de los nodos visitados:

$$qa_{0d} \geq (qa_{id} + rsv_{id}) \cdot y_{i0d} \qquad \forall i \in I \backslash \{0\}, \forall d \in D \qquad (35)$$

Finalmente, de forma equivalente a la restricción (15), la siguiente restricción asegura no exceder la el máximo período de tiempo entre visitas a cada centro de salud. Esta ecuación se aplica de forma circular sobre los días de la semana.

$$\sum_{j \in I} \sum_{0 \leq f \leq (tmv-1)} y_{ji(d+f)} \geq 1 \qquad \forall i \in I \backslash \{0\}, \forall d \in D \qquad (36)$$

Cabe remarcar que la formulación presentada en esta sección es completamente equivalente a la detallada en la sección anterior. Es decir, ambas formulaciones abarcan y permiten analizar exactamente las mismas soluciones factibles del problema real.

3.3 Características de los modelos de 3 y 4 índices

Como se mencionó, los dos modelos representan el mismo problema real de recolección y transporte de desechos médicos desde los distintos nodos-centros de salud al nodo incinerador. Ambos modelos contemplan los distintos requerimientos del problema real. Sin embargo, se deben tener en cuenta algunas diferencias prácticas para contemplar instancias que permitan viajes múltiples (multi-trip). Es decir, permitir que los vehículos puedan hacer más de un recorrido por día, siempre que el tiempo total de los recorridos realizados no exceda las horas laborales diarias.

En el caso del modelo de 4 índices, se pueden agregar camiones ficticios que representen los segundos recorridos de los vehículos reales. Por ejemplo, si el caso a resolver tiene 2 vehículos, se fijaría *NC* =2 para instancias sin viajes múltiples, *NC* =4 para permitir 2 viajes diarios por vehículo y valores mayores de *NC* si se desear permitir mayor número de viajes diarios por vehículo. Luego, se debe modificar la ecuación (5), que seguirá estando indexada sobre la cantidad real de vehículos, pero para cada vehículo, se considerarán los tiempos de todos sus recorridos, incluyendo las sumatorias sobre los índices del camión real y de los camiones ficticios asociados.

En el caso del modelo de 3 índices, la cantidad total de recorridos realizados por todos los vehículos se impone a través de la ecuación (20). En instancias donde no se permiten viajes múltiples, se fijará *NR*=*NC*. Para permitir más de un viaje por vehículo, se incrementará el valor de *NR*. Luego, la ecuación (23) impone que la duración de la suma de todos los recorridos hechos en un determinado día no debe superar la cantidad de horas laborales diarias, multiplicadas por el total de vehículos disponibles. Sin embargo, la solución podría reportar una programación de viajes de un determinado día que, aunque satisfaga la ecuación (23), no sea posible asignarla a los vehículos disponibles consiguiendo que la duración de los recorridos asignados a cada vehículo no supere las horas laborales diarias. Este caso se puede superar añadiendo un plano que corte a esta solución y resolviendo el problema nuevamente. Sin embargo, este caso no surgió en ninguno de los casos resueltos que permitían viajes múltiples.

La tabla 1 compara la cantidad de variables binarias y continuas de ambos modelos.

Tabla 1. Modelos de 3 y 4 índices: comparación de cantidad de variables.

Modelo	Variables binarias	Variables continuas
Modelo 4 índices	$NH^2 \cdot NC \cdot tp$	$2\,NH \cdot NC \cdot tp + NC \cdot tp$
Modelo 3 índices	$NH^2 \cdot tp$	$4\,NH \cdot tp$

Como puede verse, el modelo de 3 índices involucro un número considerablemente menor de variables binarias. La cantidad de variables continuas también es mucho menor, considerando que en general la cantidad de vehículos es al menos 2 ($NC \geq 2$).

En la siguiente sección se resolverá un caso real con ambos modelos y se comparará también la cantidad de restricciones.

4 Caso de estudio y comparación

Se considera un caso real presentado en [5], correspondiente a la región norte de Jordania. En este caso, los nodos a visitar corresponden a 19 hospitales, y se dispone de 2 camiones con idéntica capacidad de carga. La planificación se realiza semanalmente, siendo los días domingo no laborables para la empresa encargada. Se impone una frecuencia mínima de visitas, de forma tal que el tiempo transcurrido entre dos visitas a un mismo hospital no supere los 3 días.

El objetivo es planificar el recorrido que harán los camiones disponibles durante una semana, de forma de minimizar las distancias totales recorridas. Esto implica minimizar los costos de transporte. Las distancias entre los distintos nodos y la cantidad de desechos promedio generados por semana en cada uno puede encontrarse en [5].

Se resolvieron dos instancias aplicando cada modelo detallado en la sección 3. La primera instancia considera que cada vehículo puede realizar a lo sumo un recorrido por día. Mientras que la segunda instancia permite que los vehículos realicen hasta dos recorridos en un mismo día.

La Tabla 2 resume las dimensiones de cada modelo para el caso resuelto así como el desempeño computacional. Los modelos presentados, que resultan del tipo MINLP fueron resueltos con el solver Gurobi 11.0.0, implementados en Pyomo [13] en una computadora de escritorio con procesador Intel Core I7-7700K 4.2GHz con 32 GB de memoria RAM. En todos los casos se impuso un tiempo límite de cómputo de 3600 CPUs.

Tabla 2. Resultados obtenidos para el problema de [5].

	Máximo 1 viaje diario por vehículo		Hasta 2 viajes diarios por vehículo	
Modelo	Modelo 4 índices	Modelo 3 índices	Modelo 4 índices	Modelo 3 índices
Variables binarias	4800	2400	9600	2400
Variables continuas	492	480	984	480
Restricciones	6913	8365	13573	8365
Valor obj. óptimo	1052.0	1016.0	1027.0	987.0
Gap de optimalidad	19.8%	14.5%	20.5%	12.0%

Como puede verse, la cantidad de variables binarias, variables continuas y restricciones para el modelo de 3 índices es independiente de la cantidad de viajes permitidos diariamente por cada vehículo. Esto no sucede en el modelo de 4 índices, que al contemplar más viajes por vehículo, incrementa sus dimensiones.

El modelo de 3 índices, al tener menores dimensiones, consigue resolverse de forma más eficiente, alcanzando mejor valor objetivo y mejor gap de optimalidad.

La Tabla 3 detalla la cantidad de recorridos y duración de cada uno para las soluciones obtenidas con los dos modelos para las dos instancias del problema abordado.

Los resultados de la Tabla 3 muestran que el modelo de 3 índices consigue encontrar soluciones más eficientes desde el punto de vista operativo. Al contemplar múltiples viajes diarios, este modelo consigue hallar soluciones que programan más de un recorrido por vehículo en un cierto día. Además, estas programaciones óptimas halladas dejan un día libre en la semana, que puede emplearse con distintos fines. En cambio, al resolver el modelo de 4 índices no se hallan soluciones con estas características, a pesar de encontrarse dentro de su conjunto de soluciones factibles.

Tabla 3. Soluciones obtenidas para el problema de [5].

		Duración [horas]			
		Máximo 1 viaje diario por vehículo		Hasta 2 viajes diarios por vehículo	
Día	recorridos	Modelo 4 índices	Modelo 3 índices	Modelo 4 índices	Modelo 3 índices
1	1	4.17	2.70	4.73	7.16
	2	0.67	0.67	0.67	6.92
	3				0.67
2	1	7.68	7.19	7.44	
	2	5.73	6.86	3.09	
3	1	5.66		7.12	7.75
	2			0.67	0.67
4	1	1.30	4.73	6.16	3.84
	2	0.67	3.34		3.34
5	1	5.73	7.47	3.01	7.47
	2	4.73	0.67	0.67	
6	1	6.49	7.41	6.92	7.20
	2	5.73	5.73	6.86	0.67
Distancia total		1052.0	1016.0	1027.0	987.0
Recorridos		11	10	11	10

Las soluciones obtenidas y las performances computacionales indican que el modelo de 3 índices resulta más eficiente para resolver el problema abordado. Se debe tener en cuenta que este modelo podría brindar programaciones que no puedan asignarse a los vehículos disponibles asegurando que la duración de los recorridos asignados a cada vehículo no supere las horas laborales diarias. Si bien este tipo de soluciones no surgió en ninguna de las instancias evaluadas, en caso de suceder, el tiempo de cómputo podría duplicarse.

5 Conclusiones

En este trabajo se comparan dos modelos que abordan el problema de ruteo de vehículos para la recolección y traslado de residuos patológicos desde un número dado de centros de salud hasta un incinerador para su tratamiento.

Los modelos detallados representan el mismo problema. Es decir, consisten en dos formulaciones equivalentes, ya que contemplan el mismo conjunto de soluciones reales factibles. Se analizan y comparan las características de los modelos en cuanto a cantidad de variables binarias y continuas, así como cantidad de restricciones. Se aborda un problema real y se comparan las soluciones y las eficiencias computaciones de los modelos para dos instancias del problema.

Los resultados obtenidos permiten concluir que el segundo modelo analizado consigue mejores soluciones desde el punto de vista operativo y muestra mayor eficiencia de resolución en cuanto a tiempos de cómputos y gap de optimalidad.

Agradecimientos

Los autores agradecen a la Universidad Nacional del Litoral y al Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas - CONICET que financiaron este trabajo mediante los proyectos CAI+D 2020-506 201901 00101 y PIP 11220200103246CO.

Referencias

1. Lahyani, R., Khemakhem, M., Semet, F., "Rich Vehicle Routing Problems: From a taxonomy to a definition", European Journal of Operational Research 241(1), 1-14 (2015).
2. Koc C., Bektas T., Jabali O., Laporte G., "Thirty years of heterogeneous vehicle routing", European Journal of Operational Research 249(1), 1-21 (2016).
3. Vidal T., Laporte G., Matl P., "A concise guide to existing and emerging vehicle routing problem variants", European Journal of Operational Research 286(2), 401-416 (2020).
4. Zajac S., Huber S., "Objectives and methods in multi-objective routing problems: a survey and classification scheme", European Journal of Operational Research 290(1),1-25 (2021).
5. Alshraideh H., Abu Qdais H., Stochastic modeling and optimization of medical waste collection in Northern Jordan. Journal of Material Cycles and Waste Management 19(2), 743–753 (2017).
6. Yu, H., Sun, X., Solvang, W.D., Laporte, G., Lee, C.K.M. "A stochastic network design problem for hazardous waste management". Journal of Cleaner Production, 277 (2020).
7. Nikzamir, M., Baradaran, V. "A healthcare logistic network considering stochastic emission of contamination: Bi-objective model and solution algorithm". Transportation Research Part E: Logistics and Transportation Review, 142 (2020).
8. Tirkolaee, E.B., Abbasian, P., Weber, G. "Sustainable fuzzy multi-trip location-routing problem for medical waste management during the COVID-19 outbreak". Science of The Total Environment, 756(20) (2021).
9. Soyster, A.L. "Convex programming with set-inclusive constraints and applications to inexact linear programming". Operations Research. 21(5), 1154-1157 (1973).
10. Ben-Tal, A., Nemirovski, A. "Robust convex optimization". Mathematics of Operations Research, 23(4), 769-805 (1998).
11. Mufarrege, T., Martín Galíndez, V., Zeballos, L.J., Marcovecchio, M.G.. "Estrategia de resolución del problema de ruteo de vehículos aplicado a la recolección y transporte de residuos patológicos generados en establecimientos de salud". 52 JAIIO - SIIIO. CABA, Argentina, 2023.

12. Mufarrege, T., Martín Galíndez, V., Zeballos, L.J., Marcovecchio, M.G.. “Estrategia de resolución computacionalmente eficiente para la recolección y transporte regular de residuos patológicos generados en instituciones de salud”. Electronic Journal of Informatics and Operations Research – SADIO, 23 (1), 150-167, 2024.
13. Bynum, M.L., Hackebeil, G.A., Hart, W.E., Laird, C.D., Nicholson, B.L., Siirola, J.D., Watson, J.P. y Woodruff, D.L..Pyomo - Optimization Modeling in Python. Third Edition Vol. 67. Springer (2021).